Lindwart (E.).

Diss. Göttingen 19

Über eine Methode von Laguerre zur Bestimmung des Geschlechts einer ganzen Funktion.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Egon Lindwart
aus Riga.

Göttingen 1914.
Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Angenommen von der math.-naturwissenschaftlichen Abteilung.

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Januar 1914.

Referent: Herr Professor Dr. Edmund Landau.

Einleitung.

Um zu beweisen, daß eine ganze transzendente Funktion $F(x)$ endliches Geschlecht hat, sind bekanntlich die folgenden Schritte I, II erforderlich:

I. Falls $F(x)$ unendlich viele Nullstellen hat, muß gezeigt werden, daß es eine positive Zahl k gibt, so daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_\nu|^k} \tag{1}$$

konvergiert, wo $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$ die von Null verschiedenen Nullstellen von $F(x)$ bedeuten (hierbei sind etwaige mehrfache Nullstellen natürlich mehrfach aufgeführt); daraus folgt dann nach der Weierstraßschen Produktdarstellung einer ganzen transzendenten Funktion, daß $F(x)$ in die Form gesetzt werden kann:

$$F(x) = x^m e^{g(x)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{\beta_\nu}\right) e^{\frac{x}{\beta_\nu} + \frac{x^2}{2\beta_\nu^2} + \cdots + \frac{x^h}{h\beta_\nu^h}} \right\}, \tag{2}$$

wo h zu setzen ist: $h = [k]$, falls k nicht ganz; $h = k - 1$, falls k ganz ist (falls $h = 0$ ist, ist unter obigem Produkt das Produkt $\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\beta_\nu}\right)$ zu verstehen); $g(x)$ bedeutet eine ganze Funktion, m eine positive ganze Zahl oder Null.

Falls $F(x)$ nur endlich viele oder gar keine Nullstellen hat, so kann $F(x)$ bekanntlich in die Form gesetzt werden:

$$F(x) = p(x) . e^{g(x)}, \tag{3}$$

wo $p(x)$ ein Polynom oder eine Konstante, $g(x)$ eine ganze Funktion bedeutet.

II. Es muß gezeigt werden, daß $g(x)$ in (2) resp. (3) ein Polynom ist.

Es soll im folgenden eine auf einer Idee von Laguerre beruhende Methode mitgeteilt werden, welche den Nachweis dafür,

daß $g(x)$ ein Polynom ist, in vielen Fällen auf bedeutend einfachere Weise zu führen gestattet, als das bisher möglich war. Allerdings können alle Sätze, die sich mit Hilfe dieser Methode beweisen lassen, gleichfalls aus der Hadamardschen Theorie der ganzen Funktionen endlichen Geschlechts gefolgert werden.

Im Kap. I benutze ich diese Methode, um einen Satz zu beweisen, welcher im Mittelpunkt dieser Arbeit steht; die Sätze in Kap. II und III werden aus diesem Satz gefolgert. Den Inhalt dieses Satzes will ich zunächst folgendermaßen beschreiben. Bekanntlich kann aus der Verteilung der Nullstellen der ganzen transzendenten Funktion $F(x)$ noch nicht geschlossen werden, daß $F(x)$ endliches Geschlecht hat, da (1) für $k > 0$ konvergent sein kann, $g(x)$ aber kein Polynom, sondern eine ganze transzendente Funktion sein kann; der im Kap. I zu beweisende Satz sagt nun aus, daß aus der Verteilung der Nullstellen einer Polynomenfolge, die in jedem endlichen Bereiche gleichmäßig gegen die ganze Funktion $F(x)$ konvergiert, wohl geschlossen werden kann, daß $F(x)$ endliches Geschlecht hat. Der Wortlaut dieses Satzes ist folgender:

(Satz I.) *Es sei eine Folge von Polynomen $f_n(x)$ vorgelegt; n durchlaufe die positiven ganzen Zahlen oder nur eine Teilfolge derselben. Es sei für jedes Polynom der Folge $f_n(0) = 1$ und $f_n(x)$ genau vom n^{ten} Grade; also*

$$f_n(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)} x^\nu, \qquad a_n^{(n)} \neq 0.$$

Ich setze voraus, daß die Folge $f_n(x)$ in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereiche der komplexen x-Ebene gleichmäßig konvergent sei; der Limes ist also eine ganze Funktion, die ich mit $F(x)$ bezeichne. Die Nullstellen von $f_n(x)$ bezeichne ich mit $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots \alpha_n^{(n)}$ und mache bezüglich derselben die Voraussetzung: es gebe zwei positive von n unabhängige Zahlen k und C, so daß für alle n ist:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k} < C.$$

Ich behaupte nun, daß $F(x)$ endliches Geschlecht hat, welches $\leqq [k]$ ist; falls k eine ganze Zahl ist, behaupte ich noch etwas mehr, nämlich, daß $F(x)$ gleich dem Produkt einer Funktion, deren Geschlecht $\leqq k-1$ ist, mal einer Funktion von der Form $e^{\gamma x^k}$, wo γ eine Konstante bedeutet.

Dieser Satz kann übrigens auch leicht — wie ich schon oben angedeutet — aus der Hadamardschen Theorie der ganzen Funk-

tionen endlichen Geschlechts gefolgert werden. Hier dagegen soll dieser Satz und der einfache direkte Beweis desselben unter anderem dazu benutzt werden, um einen der wichtigsten Sätze der Hadamardschen Theorie auf einfachere Weise zu beweisen, als das bisher der Fall war.

Ich meine den Satz:

(Satz II.) *Falls die Koeffizienten der Potenzreihe*

$$F(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu$$

für alle $\nu \geqq 1$ *der Ungleichung*

$$|c_\nu| \leqq \frac{\Gamma}{(\nu!)^{\frac{1}{k}}}$$

genügen, wo Γ *und* k *von* ν *unabhängige positive Konstanten bedeuten, so hat die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion* $F(x)$ *endliches Geschlecht, welches* $\leqq [k]$ *ist.*

Ich betrachte im Kap. III die Polynomenfolge $f_n(x)$,

$$f_n(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu,$$

wo n diejenigen positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen hat, für welche $c_n \neq 0$ ist; $f_n(x)$ ist ein sogenannter Abschnitt meiner Potenzreihe. Falls nur endlich viele $c_n \neq 0$ sind, so ist $F(x)$ offenbar ein Polynom, und Satz II bedarf keines Beweises. Falls unendlich viele $c_n \neq 0$ sind, so bilden die Polynome $f_n(x)$ eine unendliche Folge, welche in jedem endlichen Bereiche gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergiert. Ich bezeichne die Nullstellen von $f_n(x)$ mit $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots \alpha_n^{(n)}$ und beweise, daß es zu jedem positiven ε eine von n unabhängige positive Konstante $C = C(\varepsilon)$ gibt, so daß für alle n

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^{k+\varepsilon}} < C \tag{4}$$

erfüllt ist. Es sind also für die Folge der Abschnitte meiner Potenzreihe alle Voraussetzungen des Satzes I verifiziert, und es folgt auf Grund desselben, daß $F(x)$ endliches Geschlecht hat, welches $\leqq [k+\varepsilon]$, also $\leqq [k]$ ist.

Ich gebe im Kap. III zwei verschiedene Beweise für die Ungleichung (4); im § 1 dieses Kapitels zeige ich, daß dieselben funktionentheoretischen Hilfsmittel, die man in der Theorie der ganzen Funktionen anwendet, um für die Nullstellen von $F(x)$ die Konvergenz von

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_\nu|^{k+\varepsilon}}$$

zu beweisen, auch einen Beweis für die Ungleichung (4) ergeben. Da diese Ungleichung eine sich auf Polynome beziehende Aussage darstellt, so schien es mir wünschenswert, für dieselbe einen Beweis zu finden, welcher nur algebraische Hilfsmittel benutzt. Einen derartigen Beweis teile ich in § 2, Kap. III mit.

§ 2 des Kap. III und Kap. I ergeben also für den oben zitierten Hadamardschen Satz (Satz II) einen sehr einfachen und elementaren Beweis für einen Leser, der noch nichts von der Hadamardschen Theorie der ganzen Funktionen endlichen Geschlechts zu wissen braucht. Dieser Beweis stützt sich im wesentlichen auf eine Eigenschaft von Polynomen (nämlich die sich auf die Nullstellen der Abschnitte beziehende Ungleichung (4)); ferner muß natürlich die Tatsache benutzt werden, daß die Nullstellen der Abschnitte gegen die Nullstellen der Potenzreihe konvergieren.

In Kap. II zeige ich, daß aus Satz I leicht einige Sätze gefolgert werden können, welche von Laguerre ausgesprochen und zum Teil bewiesen worden sind. Bei Laguerre (vgl. *Sur les fonctions du genre zéro et du genre un* [Œuvres, Bd. I, S. 174—177]) findet man folgende zwei Sätze:

(Satz III.) *Es konvergiere eine Folge von Polynomen für jeden x-Wert gegen eine ganze transzendente Funktion* $\Phi(x)$.

1) Es habe ein jedes Polynom der Folge nur reelle positive Nullstellen. Dann behauptet Laguerre: $\Phi(x)$ *ist gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht Null mal einer Funktion von der Form* $e^{\gamma x}$, *wo* γ *eine Konstante bedeutet.*

2) Es habe ein jedes Polynom der Folge nur reelle Nullstellen. Dann behauptet Laguerre: $\Phi(x)$ *ist gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht Eins mal einer Funktion von der Form* $e^{\gamma x^2}$, *wo* γ *eine Konstante bedeutet.*

Laguerre gibt nur für den ersten dieser beiden Sätze (Satz III, 1) einen Beweis, welcher als unvollständig anzusehen ist; durch Vervollständigung und Verallgemeinerung dieser dort von Laguerre angewendeten Beweismethode ist mein Beweis für Satz I[1]) entstanden. Ich zeige nun in Kap. II, wie beide Laguerreschen Sätze und einige denselben verwandte Sätze aus Satz I[1]) gefolgert werden können, wobei es jedoch nicht genügt, wie Laguerre es im Wortlaut seiner Sätze tut, bloß Konvergenz vorauszusetzen; sondern es muß für die Polynomfolgen gleichmäßige Konvergenz in jedem

1) Der Wortlaut des Satzes I ist auf Seite 4 angegeben.

endlichen Bereiche vorausgesetzt werden. Jedoch ist anzunehmen, daß auch Laguerre gleichmäßige Konvergenz gemeint hat, da er beim Beweise stillschweigend voraussetzt, daß die Ableitungen seiner Polynome gegen die Ableitung der Grenzfunktion konvergieren, und ebenso, daß die Nullstellen der Polynome gegen die Nullstellen der Grenzfunktion konvergieren.

In dem am Schluß meiner Arbeit sich befindenden Anhange zeige ich, daß es tatsächlich genügt in beiden Laguerreschen Sätzen (Satz III, 1, 2) bloß Konvergenz, nicht gleichmäßige Konvergenz, vorauszusetzen, um einen vollständigen Beweis für beide Sätze zu erzielen. Für den ersten Laguerreschen Satz (Satz III, 1) ist dieses zuerst von Herrn Georg Pólya erkannt und mir mitgeteilt worden.

Ich verfahre zu diesem Zweck folgendermaßen. Zunächst zeige ich, daß die Voraussetzungen des Satzes I [1]) wesentlich reduziert werden können, ohne daß dabei an der Behauptung etwas geändert zu werden braucht. Anstatt wie früher für die Polynomenfolge, von der in obigem Satz die Rede ist, gleichmäßige Konvergenz in jedem endlichen Bereich vorauszusetzen, genügt es, gleichmäßige Konvergenz in irgend einem Kreise um den Nullpunkt zu postulieren; denn daraus folgt schon, daß diese Polynomfolge in jedem endlichen Bereich gleichmäßig konvergent ist.

Auf Grund des so modifizierten Satzes I [1]) ergeben sich für die Laguerreschen Sätze folgende Konsequenzen. Anstatt, wie im Kap. II, beim Beweise derselben gleichmäßige Konvergenz in jedem endlichen Bereich für die Polynomfolgen vorauszusetzen, genügt es, gleichmäßige Konvergenz im Innern irgend eines Kreises der komplexen Ebene zu postulieren, wobei jedoch hinzugefügt werden muß, daß die Grenzfunktion dort nicht identisch verschwinden darf. Daraus allein folgt die Konvergenz der Polynomfolgen in der ganzen Ebene und die Laguerresche Aussage bezüglich der Grenzfunktionen. Der Wortlaut der so modifizierten Laguerreschen Sätze ist jetzt folgender:

(Satz IV.) *Es konvergiere eine Folge von Polynomen mit nur reellen Nullstellen im Innern irgend eines Kreises der komplexen x-Ebene gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion, die dort nicht identisch verschwindet. Dann konvergiert die Folge in der ganzen komplexen Ebene, gleichmäßig in jedem endlichen Bereich, und die Grenzfunktion ist gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht Eins mal einer Funktion von der Form* $e^{\gamma x^2}$, *wo* γ *eine Konstante bedeutet. Falls*

1) Der Wortlaut des Satzes I ist auf Seite 4 angegeben.

die Nullstellen der Polynome der Folge alle positiv sind, so ist die Grenzfunktion gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht Null mal einer Funktion von der Form $e^{\gamma x}$, wo γ eine Konstante bedeutet.

Ein wesentlicher Teil dieses Satzes ist gleichfalls vor mir von Herrn Pólya bewiesen worden (vgl. *Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Bd. 36, 1913, S. 279—295] und *Über Annäherung durch Polynome, deren sämtliche Wurzeln in einen Winkelraum fallen* [Nachrichten von der Kgl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse, Jahrgang 1913, S. 326—330]). Auf Grund dieses letzteren Satzes IV und unter Hinzuziehung eines Satzes von Osgood ist es endlich leicht, einen vollständigen Beweis für die Laguerreschen Sätze (Satz III) in der von Laguerre angegebenen Fassung zu erzielen.

Kapitel I.

Beweis des Hauptsatzes.

In diesem Kapitel soll der Satz I der Einleitung bewiesen werden; dieser Satz hatte folgenden Wortlaut:

Es sei eine Folge von Polynomen $f_n(x)$ vorgelegt; n durchlaufe die positiven ganzen Zahlen oder nur eine Teilfolge derselben. Es sei für jedes Polynom der Folge $f_n(0) = 1$ und $f_n(x)$ genau vom n^{ten} Grade; also

$$f_n(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)} x^\nu, \qquad a_n^{(n)} \neq 0.$$

Ich setze voraus, daß die Folge $f_n(x)$ in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereiche der komplexen x-Ebene gleichmäßig konvergent sei; der Limes ist also eine ganze Funktion, die ich mit $F(x)$ bezeichne. Die Nullstellen von $f_n(x)$ bezeichne ich mit $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots \alpha_n^{(n)}$ und mache bezüglich derselben die Voraussetzung: es gebe zwei positive von n unabhängige Zahlen k und C, so daß für alle n ist:

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k} < C.$$

Ich behaupte nun, daß $F(x)$ endliches Geschlecht hat, welches $\leqq [k]$ ist; falls k eine ganze Zahl ist, behaupte ich noch etwas mehr,

nämlich, daß $F(x)$ gleich dem Produkt einer Funktion, deren Geschlecht $\leqq k-1$ ist, mal einer Funktion von der Form $e^{\gamma x^k}$, wo γ eine Konstante bedeutet.

Falls $F(x)$ Nullstellen hat, so bezeichne ich dieselben ohne Rücksicht auf die Multiplizität mit

$$\begin{gathered} \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu, \ldots \\ |\mathfrak{p}_1| \leqq |\mathfrak{p}_2| \leqq \cdots \leqq |\mathfrak{p}_\nu| \leqq \cdots, \end{gathered} \tag{2}$$

unter Berücksichtigung ihrer Multiplizität mit

$$\begin{gathered} \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots \\ |\beta_1| \leqq |\beta_2| \leqq \cdots \leqq |\beta_\nu| \leqq \cdots. \end{gathered} \tag{3}$$

Falls $\mathfrak{p}_\nu$ in (2) eine s-fache ($s = s(\nu)$, $s > 1$) Nullstelle von $F(x)$ bedeutet, so sollen diesem $\mathfrak{p}_\nu$ in der Folge (3) s konsekutive β entsprechen: $\beta_{\mu_1}, \beta_{\mu_2}, \ldots \beta_{\mu_s}$. Die Folgen (2) und (3) bedeuten endliche Folgen, falls $F(x)$ endlich viele Nullstellen hat, dagegen unendliche, falls $F(x)$ unendlich viele Nullstellen hat. Aus der Voraussetzung $f_n(0) = 1$ folgt, daß auch $F(0) = 1$, also alle β_ν von Null verschieden sind.

Ich werde im folgenden einen Satz benutzen, welcher zuerst von Hurwitz (vgl. *Über die Nullstellen der Bessel'schen Funktion* [Mathematische Annalen, Bd. 33, 1889, S. 246—266] S. 249) bewiesen worden ist, und der für den vorliegenden Zweck folgendermaßen formuliert werden kann:

Es mögen im Innern eines beliebigen Kreises in der komplexen x-Ebene $r (r \geqq 0)$ Nullstellen von $F(x)$ liegen; jedoch soll auf dem Rande des obigen Kreises keine Nullstelle von $F(x)$ vorhanden sein; dann hat von hinreichend hohem Index an ein jedes Polynom der Folge $f_n(x)$ im Innern desselben Kreises genau r Nullstellen.

Falls β_ν eine Nullstelle von $F(x)$ bedeutet, so folgt hieraus, daß ich die Numerierung der Nullstellen der Polynome so einrichten kann, daß für die ν^{te} Nullstelle von $f_n(x)$ $(n \geqq \nu)$ gilt:

$$\lim_{n=\infty} \alpha_\nu^{(n)} = \beta_\nu. \tag{4}$$

Um dieses einzusehen, verfahre ich folgendermaßen: Ich ziehe um die Nullstellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_\nu, \ldots$ als Mittelpunkte Kreise $k_1, k_2, \ldots k_\nu, \ldots$ von so kleinem Radius, daß alle diese endlich oder unendlich vielen Kreise nicht übereinander greifen und auch nicht aneinanderstoßen. Dann hat auf Grund des soeben zitierten Satzes von Hurwitz im Innern des Kreises k_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ein jedes Polynom der Folge von hinreichend hohem Index $n \geqq n_1(\nu)$ an genau s Nullstellen, wo $s = s(\nu)$ die Multiplizität von $\mathfrak{p}_\nu$ bedeutet. Der Zahl $\mathfrak{p}_\nu$ in (2)

entsprechen in (3) die s Zahlen $\beta_{\mu_1}, \beta_{\mu_2}, \dots \beta_{\mu_s}$; ich betrachte nun diejenigen Polynome $f_n(x)$, deren Index n größer ist, als die größere der beiden Zahlen n_1 und μ_s, und gebe denjenigen s Nullstellen dieser Polynome, die innerhalb k_ν liegen, die Nummern $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_s$:

$$\alpha_{\mu_1}^{(n)}, \alpha_{\mu_2}^{(n)}, \dots \alpha_{\mu_s}^{(n)}; \qquad n \geqq \max(n_1, \mu_s).$$

Alle übrigen Nullstellen der Polynome $f_n(x)$ werden willkürlich numeriert. Ich behaupte, daß

$$\lim_{n=\infty} \alpha_{\mu_1}^{(n)} = \beta_{\mu_1}, \quad \lim_{n=\infty} \alpha_{\mu_2}^{(n)} = \beta_{\mu_2}, \dots \lim_{n=\infty} \alpha_{\mu_s}^{(n)} = \beta_{\mu_s}$$

ist; denn auf Grund des oben zitierten Satzes von Hurwitz müssen im Innern eines Kreises von beliebig kleinem Radius, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{p}_\nu$ ist, und welcher ganz innerhalb k_ν liegt, von hinreichend hohem Index an s Nullstellen von $f_n(x)$ liegen; dieselben müssen aber (falls außerdem $n \geqq \max(n_1, \mu_s)$ ist) mit $\alpha_{\mu_1}^{(n)}, \alpha_{\mu_2}^{(n)}, \dots \alpha_{\mu_s}^{(n)}$ übereinstimmen, da sogar innerhalb des größeren Kreises k_ν keine anderen Nullstellen von $f_n(x)$ liegen. Hierdurch ist also die Gültigkeit der Beziehung (4) bewiesen worden.

Falls $F(x)$ unendlich viele Nullstellen hat, ist leicht einzusehen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\beta_\nu|^k} \tag{5}$$

konvergieren muß. Denn zufolge der Voraussetzung

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k} < C$$

unseres Satzes gilt für jedes $p \geqq 1$ und jedes $n \geqq p$

$$\sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k} < C;$$

zufolge (4) ist auch

$$\sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{|\beta_\nu|^k} \leqq C;$$

da C von p unabhängig ist, und p eine beliebige Zahl > 1 bedeutet, so folgt hieraus die Konvergenz der Reihe (5).

Ich setze nun $h = k - 1$, wenn k ganz; $h = [k]$, wenn k nicht ganz ist; dann kann, zufolge der Weierstraßschen Produktdarstellung einer ganzen Funktion, $F(x)$ in die Form gesetzt werden

$$F(x) = e^{g(x)} \prod_{\nu} \left\{ \left(1 - \frac{x}{\beta_\nu}\right) e^{\frac{x}{\beta_\nu} + \frac{x^2}{2\beta_\nu^2} + \dots + \frac{x^h}{h\beta_\nu^h}} \right\};$$

$\prod_\nu$ bedeutet, daß das Produkt über sämtliche Nullstellen von $F(x)$ zu erstrecken ist; falls $F(x)$ keine Nullstellen hat, ist $\prod_\nu = 1$ zu setzen; falls $h = 0$ ist, so ist unter obigem Produkt das Produkt $\prod_\nu \left(1 - \frac{x}{\beta_\nu}\right)$ zu verstehen; $g(x)$ bedeutet eine ganze Funktion, und es ist noch zu beweisen, daß $g(x)$ ein Polynom ist, dessen Grad $[k]$ nicht übersteigt.

Nach Voraussetzung konvergiert die Folge $f_n(x)$ in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich der x-Ebene gleichmäßig gegen $F(x)$, also konvergiert dortselbst auch die Folge $f_n'(x)$ gleichmäßig gegen $F'(x)$. Ich fasse jetzt einen willkürlichen, aber im folgenden ganz fest zu haltenden Punkt $x_0 \neq \beta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ins Auge. Dann gibt es eine Umgebung von x_0 und eine positive ganze Zahl n', so daß für alle x dieser Umgebung und alle $n > n'$ die Funktion $\frac{1}{f_n(x)}$ einen Sinn hat und ebenda gleichmäßig nach $\frac{1}{F(x)}$ strebt, ebenso $-\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$ nach $-\frac{F'(x)}{F(x)}$. Also ist gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)} - x} = -g'(x) + \sum_\nu \left(\frac{1}{\beta_\nu - x} - \frac{1}{\beta_\nu} - \frac{x}{\beta_\nu^2} - \cdots - \frac{x^{h-1}}{\beta_\nu^h} \right);$$

$\sum_\nu$ bedeutet, daß die Summation über alle Nullstellen von $F(x)$ zu erstrecken ist; falls $F(x)$ keine Nullstellen hat, ist $\sum_\nu = 0$ zu setzen; falls $h = 0$ ist, so ist unter obiger Summe $\sum_\nu \frac{1}{\beta_\nu - x}$ zu verstehen. Falls $[k] > 1$ ist, bilde ich für $x = x_0$ die $[k]^{\text{ten}}$ Derivierten der Funktionen der Folge $-\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$; dieselben streben dann bekanntlich gegen die $[k]^{\text{te}}$ Derivierte der Grenzfunktion $-\frac{F'(x)}{F(x)}$ im Punkt $x = x_0$. Also ist

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)} - x_0)^{k'}} = \frac{-g^{(k')}(x_0)}{(k'-1)!} + \sum_\nu \frac{1}{(\beta_\nu - x_0)^{k'}}. \tag{6}$$

Ich habe hier $[k] + 1 = k'$ gesetzt und werde im folgenden $k' - k = \delta\,(\delta > 0)$ setzen; $g^{(k)}(x)$ bedeutet die k^{te} Ableitung von $g(x)$. (6) gilt offenbar auch, wenn $[k] = 0$, also $k' = 1$ ist; es ist dann $(k'-1)! = 0! = 1$ zu setzen. Es soll jetzt bewiesen werden,

daß $g^{(k')}(x_0) = 0$ ist, und das wird sich auf Grund von (1) durchführen lassen. Es ist also

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)}-x_0)^{k'}}-\sum_{\nu}\frac{1}{(\beta_\nu-x_0)^{k'}}\right)=-\frac{g^{(k')}(x_0)}{(k'-1)!}, \tag{7}$$

und ich werde beweisen, daß dieser Limes gleich Null ist.

Es sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

Es soll im folgenden q eine Zahl bedeuten,

1) welche gleich Null ist, falls $F(x)$ keine Nullstellen besitzt;
2) welche gleich der Anzahl der Nullstellen von $F(x)$ ist, falls letztere in endlicher Anzahl vorhanden sind;
3) welche, falls $F(x)$ unendlich viele Nullstellen hat, die Eigenschaft hat, daß für alle $N > q$

$$\left|\sum_{\nu=N}^{\infty}\frac{1}{(\beta_\nu-x_0)^{k'}}\right|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{8}$$

ist.

Ferner schlage ich um den Nullpunkt der komplexen x-Ebene einen Kreis, dessen Radius R folgenden Bedingungen genügt:

$$R \geqq 2|x_0|, \tag{9}$$

$$\frac{2^{k'}}{R^{\delta}}\cdot C<\frac{\varepsilon}{3}; \tag{10}$$

falls $q > 0$ ist, soll außerdem

$$R > |\beta_q|$$

sein; ferner soll auf der Peripherie dieses Kreises kein Punkt β_ν liegen. Im Innern desselben liegen die Nullstellen

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_Q; \qquad Q \geqq q \geqq 0$$

(falls $F(x)$ keine oder nur endlich viele Nullstellen hat, ist offenbar $Q = q$). Jetzt wähle ich $n'' > \max(n', Q+1)$ so groß, daß für alle $n \geqq n''$

$$\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots \alpha_Q^{(n)}$$

im Innern des gewählten Kreises liegen, dagegen

$$\alpha_{Q+1}^{(n)}, \alpha_{Q+2}^{(n)}, \ldots \alpha_n^{(n)}$$

außerhalb desselben liegen (die Existenz einer Zahl n'' mit dieser Eigenschaft folgt unmittelbar aus dem oben zitierten Satz von Hurwitz). Es ergibt sich also unter Berücksichtigung von (9), daß für alle $n \geqq n''$, $Q+1 \leqq \nu \leqq n$ ist:

$$R < |\alpha_\nu^{(n)}|, \quad |x_0| < \frac{1}{2} R < \frac{1}{2} |\alpha_\nu^{(n)}|,$$

(11)

$$|\alpha_\nu^{(n)} - x_0| \geqq |\alpha_\nu^{(n)}| - |x_0| > |\alpha_\nu^{(n)}| - \frac{1}{2} |\alpha_\nu^{(n)}| = \frac{1}{2} |\alpha_\nu^{(n)}|.$$

Aus (10) und (11) folgt, daß für alle $n \geqq n''$ gilt:

$$\left| \sum_{\nu=Q+1}^{n} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)} - x_0)^k} \right| < 2^k \sum_{\nu=Q+1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k}$$

(12)

$$= 2^k \sum_{\nu=Q+1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^\delta} \cdot \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k} < \frac{2^k}{R^\delta} \sum_{\nu=Q+1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k} < \frac{2^k}{R^\delta} \cdot C < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Endlich wähle ich, falls $Q > 0$ ist, $n''' \geqq n''$, so daß für alle $n \geqq n'''$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{Q} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)} - x_0)^k} - \sum_{\nu=1}^{Q} \frac{1}{(\beta_\nu - x_0)^k} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{13}$$

ist, was zufolge (4) möglich ist.

Also ergibt sich auf Grund von (8), (12) und (13)

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)} - x_0)^k} - \sum_{\nu} \frac{1}{(\beta_\nu - x_0)^k} \right|$$

$$\leqq \left| \sum_{\nu=1}^{Q} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)} - x_0)^k} - \sum_{\nu=1}^{Q} \frac{1}{(\beta_\nu - x_0)^k} \right| + \left| \sum_{\nu=Q+1}^{n} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)} - x_0)^k} \right| \tag{14}$$

$$+ \left| \sum_{\nu=Q+1}^{\infty} \frac{1}{(\beta_\nu - x_0)^k} \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

für alle $n \geqq n'''$.

Falls $Q = 0$ ist, hat $\sum_{\nu=1}^{Q}$ Null zu bedeuten; $\sum_{\nu=Q+1}^{\infty}$ ist gleich Null zu setzen, wenn $F(x)$ nur endlich viele oder gar keine Nullstellen hat.

Aus (7) und (14) folgt also, daß $g^{(k)}(x_0) = 0$ ist, und da x_0 eine beliebige komplexe Zahl $\neq \beta_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ bedeuten durfte, so folgt, daß die ganze Funktion $g^{(k)}(x)$ identisch Null ist. Es ist also $g(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade höchstens $k' - 1 = [k]$, was zu beweisen war.

Kapitel II.

Anwendung des Hauptsatzes zum Beweise einiger Sätze von Laguerre.

Es sollen hier die in der Einleitung erwähnten Laguerreschen Sätze bewiesen werden, wobei jedoch für die dort auftretenden Polynomfolgen nicht wie bei Laguerre bloß Konvergenz, sondern gleichmäßige Konvergenz in jedem endlichen Bereich vorausgesetzt werden wird.

Die so modifizierten Laguerreschen Sätze haben dann folgenden Wortlaut:

Es konvergiere eine Folge von Polynomen gleichmäßig in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich. Der Limes ist also eine ganze Funktion, die ich mit $\Phi(x)$ bezeichne.

1) Es habe ein jedes Polynom der Folge nur reelle positive Nullstellen. Dann ist $\Phi(x)$ gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht Null mal einer Funktion von der Form $e^{-\gamma_1 x}$, wo γ_1 eine Konstante bedeutet (Satz 1) [1]).

2) Es habe ein jedes Polynom der Folge nur reelle Nullstellen. Dann ist $\Phi(x)$ gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht Eins mal einer Funktion von der Form $e^{-\gamma_2 x^2}$, wo γ_2 eine Konstante bedeutet (Satz 2) [1]).

Falls alle Gradzahlen der Polynome meiner obigen Folge unterhalb einer festen Schranke liegen, so ist die Grenzfunktion offenbar ein Polynom, und ich habe in diesem Falle nichts zu beweisen. Falls unter den Gradzahlen meiner Polynome beliebig große Zahlen vorkommen, so hebe ich aus meiner Folge eine unendliche Teilfolge heraus mit der Eigenschaft, daß zu jeder positiven Zahl höchstens ein Polynom der Teilfolge gehört, welches diesen Grad hat; ferner ordne ich die Polynome der Teilfolge so um, daß die Gradzahlen der Polynome der umgeordneten Teilfolge monoton wachsen; endlich bezeichne ich die Polynome der Teilfolge mit $\varphi_n(x)$, wo $\varphi_n(x)$ genau vom n^{ten} Grade ist, und n die positiven ganzen Zahlen oder nur eine Teilfolge derselben durchläuft. Die Polynome $\varphi_n(x)$ konvergieren natürlich auch gleichmäßig in jedem endlichen Bereich gegen die ganze Funktion $\Phi(x)$.

1) Es wird ferner noch bewiesen werden, daß die Konstanten γ_1 und γ_2 notwendig ≥ 0 sind.

Falls $\Phi(x)$ identisch verschwindet, habe ich in beiden Fällen nichts zu beweisen. Ich darf also ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\Phi(x)$ nicht identisch verschwindet; dann gibt es in beiden Fällen eine negative reelle Zahl d, so daß $\Phi(d) \neq 0$. also für alle hinreichend großen $n \geqq n_1$ auch $\varphi_n(d) \neq 0$ ist. Ich betrachte nun die Polynomfolge $\dfrac{\varphi_n(d+x)}{\varphi_n(d)} = f_n(x)$ $(n > n_1)$, welche in jedem endlichen Bereich gleichmäßig gegen die Funktion $\dfrac{\Phi(d+x)}{\Phi(d)} = F(x)$ konvergiert. Die Polynome $f_n(x)$ haben die Gestalt:

$$f_n(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)} x^\nu, \qquad a_n^{(n)} \neq 0.$$

Die Nullstellen derselben bezeichne ich mit

$$\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots \alpha_n^{(n)}.$$

Falls alle Polynome $\varphi_n(x)$ nur reelle positive Nullstellen haben, so gilt dasselbe auch für die Polynome $f_n(x)$. Also ist dann

$$(1) \qquad -a_1^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|}.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $f_n(x)$ ist $\lim\limits_{n=\infty} a_1^{(n)}$ vorhanden; also ist a fortiori für alle $n \geqq n_1$

$$(2) \qquad -a_1^{(n)} < C,$$

wo C eine von n unabhängige positive Konstante bedeutet. Aus (1) und (2) folgt, daß für alle $n > n_1$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|} < C$$

ist, woraus sich auf Grund von Kapitel I ergibt, daß $F(x)$ und also auch $\Phi(x)$ gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht Null mal einer Funktion von der Form $e^{-\gamma_1 x}$ ist.

Falls alle Polynome $\varphi_n(x)$ nur reelle Nullstellen haben, so gilt dasselbe auch für die Polynome $f_n(x)$. Also ist

$$(3) \qquad (a_1^{(n)})^2 - 2a_2^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)})^2} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^2}$$

(im Falle $n = 1$ ist $a_2^{(n)}$ gleich Null zu setzen). Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $f_n(x)$ sind $\lim\limits_{n=\infty} a_1^{(n)}$ und $\lim\limits_{n=\infty} a_2^{(n)}$ vorhanden; also ist a fortiori für alle $n \geqq n_1$

(4) $$(a_1^{(n)})^2 - 2a_2^{(n)} < C.$$

Aus (3) und (4) folgt, daß für alle $n \geqq n_1$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^2} < C$$

ist, woraus sich auf Grund von Kapitel I ergibt, daß $F(x)$ und also auch $\Phi(x)$ gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht Eins mal einer Funktion von der Form $e^{-\gamma_2 x^2}$ ist.

Der Satz 1 dieses Kapitels läßt sich auch dann noch aufrecht erhalten, falls ich, anstatt von den Wurzeln der annähernden Polynome Positivität vorauszusetzen, voraussetze, daß dieselben alle im Innern eines Winkelraumes liegen, dessen Öffnung $< \pi$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß der Scheitel des obigen Winkelraumes der Nullpunkt, und die Winkelhalbierende desselben die reelle positive Achse ist; denn der allgemeine Fall kann auf diesen durch eine Translation und eine Drehung zurückgeführt werden. Ich setze ferner voraus, daß die annähernden Polynome die Gestalt haben

$$f_n(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)} x^\nu, \qquad a_n^{(n)} \neq 0;$$

der allgemeine Fall läßt sich wie oben auf diesen zurückführen. Die Nullstellen von $f_n(x)$ können also in die Form gesetzt werden:

$$\alpha_\nu^{(n)} = |\alpha_\nu^{(n)}| e^{i\varphi_\nu^{(n)}}, \qquad -\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \varphi_\nu^{(n)} \leqq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

δ ist von ν und n unabhängig und genügt der Ungleichung

$$0 < \delta < \frac{\pi}{2};$$

es ist für alle ν und n

(5) $$\cos \varphi_\nu^{(n)} \geqq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \varepsilon > 0.$$

Es ist:

(6)
$$-a_1^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}| . e^{i\varphi_\nu^{(n)}}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{-i\varphi_\nu^{(n)}}}{|\alpha_\nu^{(n)}|}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \varphi_\nu^{(n)}}{|\alpha_\nu^{(n)}|} - i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \varphi_\nu^{(n)}}{|\alpha_\nu^{(n)}|},$$

also zufolge (5) und (6)

(7) $$|a_1^{(n)}| \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos \varphi_\nu^{(n)}}{|\alpha_\nu^{(n)}|} \geqq \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|}.$$

Da $\lim_{n=\infty} a_1^{(n)}$ vorhanden ist, so ist für alle $n \geqq 1$

$$|a_1^{(n)}| < C, \tag{8}$$

wo C eine von n unabhängige Konstante ist. Aus (7) und (8) folgt, daß für alle n

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|} < \frac{C}{\varepsilon}$$

ist, woraus sich auf Grund von Kap. I ergibt, daß die Grenzfunktion gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht Null mal einer Funktion von der Form $e^{\gamma x}$ ist, wo γ eine Konstante bedeutet.

Der Satz 2 dieses Kapitels läßt sich auch noch aufrecht erhalten, falls ich bezüglich der Nullstellen der annähernden Polynome die Voraussetzung mache, daß dieselben alle in einer Halbebene, etwa in der Halbebene $\Im(x) \geqq 0$ liegen; $\Im(x)$ bedeutet: imaginärer Teil von x. Der Nachweis hierfür wird in dem am Ende dieser Arbeit sich befindenden Anhange erbracht werden.

Die Sätze 1 und 2 dieses Kapitels sind gleichzeitig mit mir, die obige Verallgemeinerung des Satzes 1 ist vor mir von Herrn Pólya bewiesen worden; vgl. die in der Einleitung zitierten Arbeiten von Herrn Pólya. Die Beweismethode des Herrn Pólya ist von der hier angewendeten völlig verschieden, da Herr Pólya die obigen Sätze mit Hilfe der Hadamardschen Theorie ableitet. — Ferner benutzt Herr Pólya beim Beweise dieser Sätze geringere Voraussetzungen, als die hier gemachten; ich komme hierauf noch in dem am Ende meiner Arbeit sich befindenden Anhange zurück.

Endlich wäre noch zu bemerken, daß Herr Pólya in seinen Arbeiten beweist, daß die in den Sätzen 1 und 2 dieses Kapitels auftretenden Konstanten γ_1 und γ_2 notwendig $\geqq 0$ sind[1]). Diese Tatsache kann folgendermaßen bewiesen werden. In beiden Fällen darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß die Grenzfunktion $F(x)$ und die annähernden Polynome $f_n(x)$ für $x = 0$ den Wert Eins haben. Im Falle des Satzes 1 hat $F(x)$ also die Form

$$e^{-\gamma_1 x} \prod_\nu \left(1 - \frac{x}{\beta_\nu}\right) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots;$$

indem ich die beiden Faktoren $e^{-\gamma_1 x}$ und $\prod_\nu$ in Potenzreihen ent-

1) Daß $\gamma_1 \geqq 0$ ist, war auch Laguerre bekannt. Vgl. Laguerre, Œuvres I, p. 176.

wickele, dieselben miteinander multipliziere und die Koeffizienten der beiden Potenzreihen auf der rechten und linken Seite der obigen Gleichung einander gleich setze, erhalte ich

$$-\gamma_1 - \sum_\nu \frac{1}{\beta_\nu} = c_1,$$

$$\gamma_1 = -c_1 - \sum_\nu \frac{1}{\beta_\nu} = \lim_{n=\infty} (-\alpha_1^{(n)}) - \sum_\nu \frac{1}{\beta_\nu} = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}} - \sum_\nu \frac{1}{\beta_\nu}$$

(bezüglich der Koeffizienten und Nullstellen der annähernden Polynome und der Grenzfunktion ist dieselbe Bezeichnung beibehalten. wie vorhin; die Nullstellen der annähernden Polynome denke ich mir, wie in Kap. I, so numeriert, daß $\lim_{n=\infty} \alpha_\nu^{(n)} = \beta_\nu$ ist). γ_1 ist also offenbar $\geqq 0$, falls $F(x)$ keine Nullstellen hat. Falls $F(x)$ Nullstellen hat, so setze ich N gleich der Anzahl der Nullstellen, wenn dieselben in endlicher Anzahl vorhanden sind, und N gleich einer beliebigen positiven ganzen Zahl, wenn dieselben in unendlicher Anzahl vorhanden sind. Es ist dann

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}} - \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\beta_\nu} \geqq \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}} - \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\beta_\nu} = 0,$$

woraus sich in beiden Fällen unmittelbar $\gamma_1 > 0$ ergibt.

Um zu beweisen, daß die Konstante γ_2 im Satze 2 auch $\geqq 0$ ist. verfährt man am bequemsten folgendermaßen: Die Grenzfunktion $F(x)$ hat die Form

$$F(x) = e^{-\gamma_2 \cdot x^2 + \delta x} \cdot \prod_\nu \left(1 - \frac{x}{\beta_\nu}\right) e^{\frac{x}{\beta_\nu}}$$

(δ bedeutet eine Konstante); die Funktion

$$F(x) \cdot F(-x) = \Psi(x^2) = \Psi(z),$$

wo $x^2 = z$ gesetzt ist, hat die Form

$$\Psi(z) = e^{-2\gamma_2 \cdot z} \cdot \prod_\nu \left(1 - \frac{z}{\beta_\nu^2}\right);$$

diese Funktion ist die Grenzfunktion der Polynomenfolge

$$f_n(x) \cdot f_n(-x) = \psi_n(x^2) = \psi_n(z);$$

da jedes Polynom $f_n(x)$ nur reelle Nullstellen $\neq 0$ hat, so hat jedes Polynom $\psi_n(z)$ nur reelle positive Nullstellen; also ist $\gamma_2 > 0$, was zu beweisen war.

Es soll endlich noch die folgende Verallgemeinerung der Sätze 1 und 2 dieses Kapitels angegeben werden. Im Satze 1 wurde bezüglich der Nullstellen der annähernden Polynome die Voraussetzung gemacht, daß dieselben alle auf der reellen positiven Achse liegen — also auf einem vom Nullpunkt der komplexen x-Ebene ausgehenden Halbstrahl; im Satze 2 wurde vorausgesetzt, daß dieselben alle auf der reellen Achse liegen — also auf zwei vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahlen; es soll im folgenden die Voraussetzung gemacht werden, daß die Nullstellen der annähernden Polynome alle auf irgend welchen endlich vielen vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahlen liegen, und aus dieser Voraussetzung soll gefolgert werden, daß die Grenzfunktion endliches Geschlecht hat. Es soll also der folgende Satz bewiesen werden:

Es konvergiere eine Folge von Polynomen

$$f_n(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)} x^\nu, \quad a_n^{(n)} \neq 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(die Annahme, daß die Polynome der Folge die obige spezielle Gestalt haben, kann auch hier vermieden werden) gleichmäßig in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich. Der Limes ist also eine ganze Funktion, die ich mit $F(x)$ bezeichne. Es mögen alle Nullstellen sämtlicher Polynome auf irgend welchen endlich vielen vom Nullpunkt der komplexen x-Ebene ausgehenden Halbstrahlen liegen. — Dann hat die Grenzfunktion endliches Geschlecht (Satz 3).

Die Anzahl dieser Halbstrahlen bezeichne ich durch l und die Winkel, die dieselben mit der positiven x-Achse bilden, durch

$$\vartheta_1 . 2\pi, \quad \vartheta_2 . 2\pi, \ldots \vartheta_l . 2\pi, \tag{9}$$

wobei

$$0 \leqq \vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_l < 1$$

angenommen werden darf. Bekanntlich kann man eine positive ganze Zahl k und l positive ganze Zahlen $g_1, g_2, \ldots g_l$ angeben, so daß für alle $1 \leqq p \leqq l$ ist

$$|k\vartheta_p - g_p| < \frac{1}{8}$$

(vgl. z. B. H. Minkowski, *Diophantische Approximationen*, Leipzig 1907, S. 8); es ist also für alle $1 \leqq p \leqq l$ auch

$$|k\vartheta_p . 2\pi - g_p . 2\pi| < \frac{\pi}{4},$$

$$k\vartheta_p 2\pi = g_p 2\pi + \psi_p,$$

wo ψ_ρ einen Winkel bedeutet, welcher zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{4}$ liegt. Es ist

$$\cos k\vartheta_p \,.\, 2\pi = \cos\psi_p > \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{10}$$

Ferner ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)})^k} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k \,.\, e^{ik\varphi_\nu^{(n)}}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos k\varphi_\nu^{(n)}}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k} - i \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin k\varphi_\nu^{(n)}}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k}. \tag{11}$$

Da nach Voraussetzung $\varphi_\nu^{(n)}$, was auch $1 \leq \nu \leq n$, $n \geq 1$ sei, immer einen der Werte (9) annimmt, so ergibt sich auf Grund von (10) und (11):

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)})^k} \right| \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos k\varphi_\nu^{(n)}}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k} \geqq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k}. \tag{12}$$

$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)})^k}$ ist für $n \geqq k$ eine ganze rationale Funktion der k Zahlen $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots a_k^{(n)}$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)})^k} = G(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots a_k^{(n)});$$

die Koeffizienten der Funktion G hängen nicht von n ab. Da $\lim_{n=\infty} a_1^{(n)}$, $\lim_{n=\infty} a_2^{(n)}, \ldots \lim_{n=\infty} a_k^{(n)}$ vorhanden sind, so ist auch

$$\lim_{n=\infty} G(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots a_k^{(n)})$$

vorhanden, also ist a fortiori für alle $n \geqq 1$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)})^k} \right| < C, \tag{13}$$

wo C eine von n unabhängige Konstante bedeutet. Aus (12) und (13) folgt, daß für alle $n \geqq 1$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k} < \frac{2C}{\sqrt{2}}$$

ist, woraus sich dann auf Grund von Kapitel I ergibt, daß $F(x)$ endliches Geschlecht hat.

Kapitel III.

Anwendung des Hauptsatzes zum Beweise eines Satzes von Hadamard.

§ 1.

In diesem Kapitel soll der Satz II der Einleitung bewiesen werden; dieser Satz hatte folgenden Wortlaut:

Falls die Koeffizienten der Potenzreihe

$$F(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu x^\nu \tag{1}$$

für alle $\nu \geqq 1$ *der Ungleichung*

$$|c_\nu| \leqq \frac{\Gamma}{(\nu!)^{\frac{1}{k}}} \tag{2}$$

genügen, wo Γ *und* k *von* ν *unabhängige positive Konstanten bedeuten, so hat die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion* $F(x)$ *endliches Geschlecht, welches* $\leqq [k]$ *ist.*

Der allgemeinere Fall, daß $F(0) = c_0 \neq 1$ ist, läßt sich leicht auf den obigen Satz zurückführen; denn falls $c_0 \neq 1$ ist, und c_m $(m \geqq 0)$ den ersten von Null verschiedenen Koeffizienten der Potenzreihe bedeutet, so setze ich

$$F(x) = c_m x^m . F_1(x), \quad F_1(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu' x^\nu .$$

Die Koeffizienten der neuen Potenzreihe genügen offenbar für alle $\nu \geqq 1$ der Ungleichung

$$|c_\nu'| \leqq \frac{\frac{\Gamma}{|c_m|}}{(\nu!)^{\frac{1}{k}}} = \frac{\Gamma'}{(\nu!)^{\frac{1}{k}}},$$

und falls ich beweisen kann, daß das Geschlecht von $F_1(x)$ höchstens $[k]$ ist, so folgt offenbar dasselbe für die Funktion $F(x)$.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, darf beim Beweise des obigen Satzes angenommen werden, daß unendlich viele c_n von Null verschieden sind. Ich betrachte die Polynomenfolge $f_n(x)$,

$$f_n(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu,$$

wo n diejenigen positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen hat, für welche $c_n \neq 0$ ist. Ich bezeichne die nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen von $f_n(x)$ mit

$$\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots \alpha_n^{(n)}; \quad |\alpha_1^{(n)}| \leqq |\alpha_2^{(n)}| \leqq \ldots \leqq |\alpha_n^{(n)}|$$

und werde beweisen, daß es zu jeder positiven Zahl ε eine von n unabhängige positive Konstante $C = C(\varepsilon)$ gibt, so daß für alle n gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^{k+\varepsilon}} < C. \tag{3}$$

Daraus folgt dann auf Grund von Kap. I (Satz I der Einleitung), daß $F(x)$ endliches Geschlecht hat, welches $\leqq [k+\varepsilon]$, also $\leqq [k]$ ist.

Ich benutze zu diesem Zweck den folgenden Satz (vgl. A. Pringsheim, *Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung* [Mathematische Annalen, Bd. 58, 1904, S. 257—342] S. 337): Ist

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{k}} \cdot |c_\nu|} \leqq (k \cdot \gamma)^{\frac{1}{k}},$$

so hat man bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu \right| < e^{(\gamma+\varepsilon) \cdot |x|^k}$$

für alle $|x| \geqq R(\varepsilon)$.

Diesen Satz wende ich auf die Potenzreihe

$$F^*(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu| x^\nu$$

an, für deren Koeffizienten nach Voraussetzung die Ungleichung (2) gilt; also ist

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{k}} \cdot |c_\nu|} \leqq \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\Gamma} = 1,$$

und ich darf $\gamma = \frac{1}{k}$ setzen; falls ich auch $\varepsilon = \frac{1}{k}$ setze, so erhalte ich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu| x^\nu < e^{\frac{2}{k} x^k}$$

für alle $|x| \geqq R'$.

Da nun für alle x

$$|f_n(x)| = \left|1 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x^\nu\right| \leqq 1 + \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu| . |x|^\nu < 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu| . |x|^\nu = F^*(|x|)$$

ist, so gilt für alle $|x| \geqq R'$ gleichfalls

$$|f_n(x)| < e^{\frac{2}{k} |x|^k}, \tag{4}$$

was auch n sei.

Ich benutze ferner folgende Ungleichung, welche in der Theorie der ganzen Funktionen vielfach angewendet wird (vgl. z. B. Vivanti-Gutzmer, *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Leipzig 1906, S. 209):

$$N \leqq \frac{\lg M(\varrho)}{\lg(\vartheta - 1)}. \tag{5}$$

Es bedeuten hier: $M(\varrho)$ das Maximum des absoluten Betrages einer ganzen Funktion auf dem Kreise $|x| = \varrho$; von dieser Funktion wird vorausgesetzt, daß sie im Punkt $x = 0$ den Wert Eins hat. ϑ bedeutet eine positive Zahl > 2, N ist die Anzahl derjenigen Nullstellen der obigen ganzen Funktion, welche absolut $\leqq \frac{\varrho}{\vartheta}$ sind [1]).

In letzterer Ungleichung setze ich $\vartheta = 3$ und $\varrho = 3r$:

$$N \leqq \frac{\lg M(3r)}{\lg 2}; \tag{6}$$

N ist also die Anzahl derjenigen Nullstellen, welche absolut $\leqq r$ sind.

Da die Funktionen $f_n(x)$ zufolge (4) auf dem Kreise $|x| = R'$ dem absoluten Betrage nach alle kleiner sind als $e^{\frac{2}{k} R'^k}$, so hat auf Grund von (6) jede dieser Funktionen im Innern und auf dem Rande des Kreises $|x| = \frac{R'}{3}$ höchstens N' Nullstellen, wo N' die

1) Bekanntlich gilt sogar die Ungleichung

$$N \leqq \frac{\lg M(\varrho)}{\lg \vartheta}$$

und zwar schon für $\vartheta > 1$; ich benutze im folgenden trotzdem die Ungleichung (5), weil dieselbe leichter beweisbar ist und hier dieselben Dienste leistet.

größte ganze Zahl bedeutet, welche

$$\leq \frac{\frac{2}{k} K^{\varkappa}}{\lg 2}$$

ist: N' ist also eine von n unabhängige Zahl.

Falls ν eine ganze Zahl größer als N' bedeutet, so liegt α_ν^{n} $(n \geq \nu)$ sicher außerhalb des Kreises $|z| = \frac{N'}{3}$, es ist somit $3|\alpha_\nu^{n}| > N'$, und es folgt auf Grund von (4) und (6)

$$(7) \qquad \nu \leq \frac{\frac{2}{k}(3|\alpha_\nu^{(n)}|)^{\varkappa}}{\lg 2} \quad , \quad |\alpha_\nu^{(n)}| \geq \frac{1}{3}\left(\frac{\lg 2 \cdot k}{2}\right)^{\frac{1}{k}} \nu^{\frac{1}{\varkappa}} = \gamma_1 \nu^{\frac{1}{\varkappa}},$$

wo γ_1 eine von ν und n unabhängige Konstante bedeutet.

Es ist also für $\nu > N'$, $n \geq \nu$

$$\frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|} \leq \frac{1}{\gamma_1} \cdot \frac{1}{\nu^{\frac{1}{\varkappa}}},$$

und falls s eine beliebige positive Zahl bedeutet, ist für alle $n \geq N' + 1$

$$\sum_{\nu=N'+1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^{k+s}} \leq \frac{1}{\gamma_1^{k+s}} \sum_{\nu=N'+1}^{n} \frac{1}{\nu^{\frac{k+s}{\varkappa}}}$$

(8)

$$< \frac{\frac{\varkappa}{k+s}}{\gamma_1^{k+s}} \sum_{\nu=N'+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{\frac{k+s}{\varkappa}}},$$

wo rechts jetzt eine von n unabhängige Zahl steht.

Da $f_n(0) = 1$ ist, so gibt es eine positive Zahl δ, so daß alle Nullstellen sämtlicher Polynome $f_n(x)$ dem absoluten Betrage nach größer als δ sind. Für alle $n \geq N'$ ist also $\sum_{\nu=1}^{N'} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^{k+s}} < \frac{N'}{\delta^{k+s}}$, wo die rechte Seite eine von n unabhängige Zahl ist. Hieraus und aus (8) folgt, daß es zu beliebigem $s > 0$ eine von n unabhängige Zahl $C = C(s)$ gibt, so daß für alle n Ungleichung (3) gilt.

§ 2.

In diesem Paragraphen soll für die Ungleichung (3) des vorigen Paragraphen ein algebraischer Beweis gegeben werden. Zu diesem Zweck beweise ich folgenden Hilfssatz:

Es seien zwei positive Konstanten $\Gamma \geqq 1$ *und* ϱ *gegeben. Es bedeute*

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0),$$

eine ganze rationale Funktion von beliebigem Grade $n \geqq 1$, *deren Koeffizienten für alle* $1 \leqq \nu \leqq n$ *der Ungleichung genügen*

$$|a_\nu| \leqq \frac{\Gamma}{(\nu!)^\varrho};$$

die nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen von $f(x)$ *bezeichne ich mit*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \quad |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \ldots \leqq |\alpha_n|.$$

Dann gilt für alle $1 \leqq \nu \leqq n$ *die Abschätzung:*

$$|\alpha_\nu| > \frac{e^{-\varrho}}{3\Gamma} \cdot \nu^\varrho.$$

Zum Beweise benutze ich das sogenannte Gräffesche Verfahren (vgl. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd. I, 2. Aufl., Braunschweig 1898, S. 386); ich bilde nämlich aus $f(x) = f_0(x)$ auf folgende Weise eine Polynomfolge: $f_0(x) \cdot f_0(-x) = f_1(x^2)$; statt x^2 will ich aber in letzterem Polynom wieder x schreiben und erhalte so die Folge:

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots f_m(x), f_{m+1}(x), \ldots,$$

wo $f_{m+1}(x)$ aus $f_m(x)$ gebildet ist, indem ich setze

$$f_m(x) \cdot f_m(-x) = f_{m+1}(x^2)$$

und statt x^2 wieder x schreibe. Alle diese Polynome sind also vom n-ten Grade, und die Wurzeln von $f_m(x)$ sind die 2^m-ten Potenzen der Wurzeln von $f(x) = f_0(x)$. Ich will diese Polynome folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= 1 + a_{1,0} x + a_{2,0} x^2 + \cdots + a_{n,0} x^n \\
f_1(x) &= 1 + a_{1,1} x + a_{2,1} x^2 + \cdots + a_{n,1} x^n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_m(x) &= 1 + a_{1,m} x + a_{2,m} x^2 + \cdots + a_{n,m} x^n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$(-1)^\nu a_{\nu,0}$ $(1 \leqq \nu \leqq n)$ ist die ν^{te} elementar-symmetrische Funktion der n Zahlen $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \cdots \frac{1}{\alpha_n}$; ich schreibe:

$$(-1)^\nu \cdot a_{\nu,0} = \sum \left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu} \right) = A + B + \cdots + F;$$

die Anzahl der Summanden ist $\binom{n}{\nu}$, und A möge den Summanden $\prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu}$ bedeuten. Ebenso ist

$$(1) \qquad (-1)^\nu . a_{\nu, m} = \sum \left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu} \right)^{2^m} = A^{2^m} + B^{2^m} + \dots + F^{2^m}.$$

Falls $1 \leqq \nu \leqq n-1$ und $|\alpha_\nu| < |\alpha_{\nu+1}|$ ist, so steht im Nenner von $\prod_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu}$ eine Auslese der absolut kleinsten Wurzeln; es ist deshalb der absolute Betrag von A größer, als der absolute Betrag eines jeden der übrigen Summanden in der Summe $A + B + \dots + F$:

$$|A| > |B|, \dots |A| > |F|; \quad \frac{B}{A} < 1, \dots \frac{F}{A} < 1;$$

also ist offenbar

$$\lim_{q=\infty} \sqrt[q]{1 + \left(\frac{B}{A}\right)^q + \dots + \left(\frac{F}{A}\right)^q} = 1,$$

und folglich

$$(2) \qquad \lim_{q=\infty} \sqrt[q]{|A^q + B^q + \dots + F^q|} = \lim_{q=\infty} \sqrt[q]{|A^q| \left(1 + \left(\frac{B}{A}\right)^q + \dots + \left(\frac{F}{A}\right)^q\right)} = |A|,$$

natürlich auch dann, wenn q statt der positiven ganzen Zahlen nur die Teilfolge 2^m derselben durchläuft. Also ist auf Grund von (1) und (2)

$$(3) \qquad \lim_{m=\infty} \sqrt[2^m]{|a_{\nu, m}|} = \sqrt[2^m]{|A^{2^m} + B^{2^m} + \dots + F^{2^m}|} = |A| = \frac{1}{|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu|},$$

falls $|\alpha_\nu| < |\alpha_{\nu+1}|$ $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$, und natürlich auch, falls $\nu = n$ ist; Formel (3) soll die Grundlage für den folgenden Beweis bilden.

Das Ziel des folgenden ist, für alle $1 \leqq \nu \leqq n$, $m \geqq 0$ die Abschätzung zu beweisen

$$(4) \qquad |a_{\nu, m}| \leq I^{2^m} \frac{(2\nu+1)^{2^m - 1}}{(\nu!)^{\varrho \cdot 2^m}};$$

im Falle $m = 0$ bedarf (4) keines Beweises; denn falls ich in (4) $m = 0$ setze, so erhalte ich

$$|a_{\nu, 0}| \leqq \frac{I}{(\nu!)^\varrho},$$

also gerade die Voraussetzung meines Hilfssatzes; der Nachweis dafür, daß (4) auch für alle $m > 0$ gilt, wird durch vollständige Induktion erbracht werden. Zu diesem Zweck setze ich voraus, es sei für ein bestimmtes m und alle $1 \leqq \nu \leqq n$ die Ungleichung (4) bereits bewiesen, und werde zeigen, daß daraus die Gültigkeit derselben für $m+1$ und alle $1 \leqq \nu \leqq n$ folgt. Der Koeffizient $a_{\nu, m+1}$ von x^ν in $f_{m+1}(x)$ ist nach Definition der Koeffizient von $x^{2\nu}$ des Polynoms $f_m(x) . f_m(-x)$. Es ist also

$$a_{\nu, m+1} = \sum_i (-1)^i a_{i, m} \cdot a_{2\nu-i, m},$$

wo $\sum_i$ bedeutet, daß über alle $0 \leqq i \leqq 2\nu$ zu summieren ist, welche außerdem der Nebenbedingung $2\nu - n \leqq i \leqq n$ genügen; $a_{0, m}$ ist gleich Eins zu setzen. Da ich die Gültigkeit der Ungleichung (4) für alle $1 \leqq \nu \leqq n$ und die Zahl m voraussetze, und $a_{0, m} = 1 \leqq \Gamma^{2^m}$ ist, so erhalte ich:

$$(5) \quad |a_{\nu, m+1}| \leqq \sum_i |a_{i, m}| \cdot |a_{2\nu-i, m}| \leqq \Gamma^{2^{m+1}} \sum_{i=0}^{2\nu} \frac{[(2i+1)(2(2\nu-i)+1)]^{2^m-1}}{[i!\,(2\nu-i)!]^{\varrho \cdot 2^m}},$$

wobei $0!$ hier und im folgenden gleich Eins zu setzen ist. Es wird jetzt

$$\sum_{i=0}^{2\nu} \frac{[(2i+1)(2(2\nu-i)+1)]^{2^m-1}}{[i!\,(2\nu-i)!]^{\varrho \cdot 2^m}}$$

für alle $\nu \geqq 1$, $m \geqq 0$ abgeschätzt werden. Ich behaupte nun, daß von allen $2\nu+1$ Summanden der letzteren Summe der mittlere Summand $i = \nu$ der größte ist. In der Tat, falls $m = 0$ ist, so ist der Zähler eines jeden Summanden gleich 1, also der Zähler des mittleren Summanden nicht kleiner als die Zähler der übrigen Summanden; falls $m > 0$ ist, so ist der Zähler des mittleren Summanden größer, als die Zähler aller übrigen; denn das Produkt zweier positiver Zahlen, deren Summe konstant ist, hat dann den größten Wert, wenn beide Zahlen einander gleich sind. Dagegen ist der Nenner des Terms $i = \nu$ kleiner, als die Nenner aller übrigen Terme; denn offenbar entsteht das Produkt $i!\,(2\nu-i)!$, wo $\nu \geqq 1$, $0 \leqq i \leqq \nu - 1$ ist, aus dem Produkt $\nu!\,\nu!$, indem in letzterem Produkt in einer der beiden Fakultäten die Faktoren: ν, $\nu-1$, $\nu-2, \ldots \nu-(\nu-i-1) = i+1$ ersetzt werden durch die größeren Faktoren: $\nu+1$, $\nu+2$, $\nu+3, \ldots \nu+(\nu-i) = 2\nu-i$. Da $\varrho \cdot 2^m$ für alle $m \geqq 0$ positiv ist, so ist auch für alle $m \geqq 0$, $\nu \geqq 1$, $0 \leqq i \leqq \nu - 1$

$$(\nu!\ \nu!)^{\varrho\cdot 2^m} < (i!\,(2\nu-i)!)^{\varrho\cdot 2^m}.$$

Damit ist bewiesen, daß der Term $i = \nu$ in obiger Summe der größte ist, und diese Summe ist also kleiner, als die Anzahl ihrer Summanden mal dem mittleren Summand $i = \nu$:

$$(6)\qquad \sum_{i=0}^{2\nu} \frac{[2i+1)(2(2\nu-i)+1)]^{2^m-1}}{[i!\,(2\nu-i)!]^{\varrho\cdot 2^m}} < (2\nu+1)\cdot\frac{[(2\nu+1)(2\nu+1)]^{2^m-1}}{(\nu!\ \nu!)^{\varrho\cdot 2^m}}$$
$$= \frac{(2\nu+1)^{2^{m+1}-1}}{(\nu!)^{\varrho\cdot 2^{m+1}}};$$

(6) gilt für alle $m \geqq 0$, $\nu \geqq 1$; auf Grund von (5) und (6) ergibt sich, daß für alle $1 \leqq \nu \leqq n$ und die Zahl $m+1$ gewiß gilt

$$|a_{\nu,\,m+1}| < \Gamma^{2^{m+1}}\,\frac{(2\nu+1)^{2^{m+1}-1}}{(\nu!)^{\varrho\cdot 2^{m+1}}}.$$

Es ist also durch vollständige Induktion die Gültigkeit der Ungleichung (4) für alle $1 \leqq \nu \leqq n$, $m \geqq 0$ bewiesen (für alle $m \geqq 1$ sogar mit dem Zeichen $<$).

Es ist also, falls $|\alpha_\nu| < |\alpha_{\nu+1}|$ $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$ oder $\nu = n$ ist, auf Grund von (3) und (4)

$$\frac{1}{|\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_\nu|} = \lim_{m=\infty} \sqrt[2^m]{|a_{\nu,\,m}|} \leqq \lim_{m=\infty} \sqrt[2^m]{\Gamma^{2^m}\cdot\frac{(2\nu+1)^{2^m-1}}{(\nu!)^{\varrho\cdot 2^m}}}$$

$$= \Gamma\cdot\frac{2\nu+1}{(\nu!)^{\varrho}};$$

$$\frac{1}{|\alpha_\nu|^\nu} \leqq \Gamma\cdot\frac{2\nu+1}{(\nu!)^{\varrho}};$$

$$|\alpha_\nu|^\nu \geqq \frac{1}{\Gamma}\cdot\frac{(\nu!)^{\varrho}}{2\nu+1};$$

$$|\alpha_\nu| \geqq \frac{(\sqrt[\nu]{\nu!})^{\varrho}}{\sqrt[\nu]{\Gamma}\cdot\sqrt[\nu]{2\nu+1}}.$$

Da bekanntlich für $\nu!$ die Abschätzung gilt:

$$\nu! = e^{\sum_{i=1}^{\nu}\log i} \geqq e^{\int_1^\nu \log u\,du} > e^{\nu\log\nu-\nu},$$

so ist $\sqrt[\nu]{\nu!} > e^{\log\nu-1} = \frac{\nu}{e}$; da $\Gamma \geqq 1$ ist, so ist für alle $\nu \geqq 1$

$$\sqrt[\nu]{\Gamma} \leqq \Gamma;$$

da die Funktion $\sqrt[\nu]{2\nu+1}$ auf der Strecke von 1 bis ∞ monoton abnimmt und für $\nu = 1$ gleich 3 ist, so ist für alle $\nu \geqq 1$

$$\sqrt[\nu]{2\nu+1} \leqq 3;$$

also ist

$$|\alpha_\nu| > \frac{e^{-\varrho}}{3\Gamma} \cdot \nu^\varrho, \tag{7}$$

immer unter der Voraussetzung, daß $|\alpha_\nu| < |\alpha_{\nu+1}|$ oder $\nu = n$ ist. Falls $|\alpha_\nu| = |\alpha_{\nu+1}|$ ist, so wähle ich die kleinste Zahl $\nu' \geqq 1$ für welche $|\alpha_{\nu+\nu'}| < |\alpha_{\nu+\nu'+1}|$ oder $|\alpha_{\nu+\nu'}| = |\alpha_n|$ ist. Es ist dann

$$|\alpha_\nu| = |\alpha_{\nu+\nu'}| > \frac{e^{-\varrho}}{3\Gamma} \cdot (\nu+\nu')^\varrho > \frac{e^{-\varrho}}{3\Gamma} \cdot \nu^\varrho,$$

woraus sich ergibt, daß die Abschätzung (7) allgemein gilt, und unser Hilfssatz also vollständig bewiesen ist.

Ich setze jetzt $\varrho = \frac{1}{k}$ und wende diesen Hilfssatz auf die Abschnitte der Potenzreihe (1) in § 1 dieses Kapitels an. Im Falle, daß die Konstante Γ in (2) des § 1 dieses Kapitels der Ungleichung $\Gamma \geqq 1$ genügt, erhalte ich für alle $\nu \geqq 1$, $n \geqq \nu$

$$|\alpha_\nu^{(n)}| > \frac{1}{3\Gamma} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \nu^{\frac{1}{k}} = \gamma_2 \cdot \nu^{\frac{1}{k}}, \tag{8}$$

wo γ_2 also eine von ν und n unabhängige Konstante bedeutet; falls $\Gamma < 1$ ist, so hat man in (8) Γ durch 1 zu ersetzen (aus (8) kann natürlich geschlossen werden, daß dieselbe Abschätzung — mit dem Zeichen $\geqq$ — auch für die ν^{te} Wurzel der Potenzreihe selbst gilt). Aus (8) wird dann die Ungleichung (3) des § 1 dieses Kapitels genau so gefolgert wie aus der Ungleichung (7) des § 1.

§ 3.

Ich setze jetzt für die Potenzreihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

voraus, daß es eine positive Zahl μ gebe mit folgender Eigenschaft: es möge zu jedem positiven ε eine positive Konstante $\Gamma = \Gamma(\varepsilon)$ geben, so daß für alle n

(1) $$|c_n| \leqq \frac{\Gamma}{(n!)^{\mu-\varepsilon}}$$

ist; ferner möge es zu jedem positiven ε unendlich viele n geben, so daß

(2) $$|c_n| > \frac{1}{(n!)^{\mu+\varepsilon}}$$

ist[1]). Dann kann zu jedem positiven δ eine Konstante $C = C(\delta)$ angegeben werden, so daß

(3) $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^{\mu}} < C\, n^{1-\delta}$$

ist ($\alpha_\nu^{(n)}$ bedeuten wie in § 1, 2 die Nullstellen der Abschnitte). Denn ich kann zwei positive Konstanten $\varepsilon_1 < \mu$ und ε_2 auffinden, so daß $\frac{1}{\mu-\varepsilon_1} + \varepsilon_2 = \frac{1}{\mu} + \delta$ ist; ich setze ferner $\frac{1}{\mu-\varepsilon_1} = k$, und es folgt (3) auf Grund von (1) wegen der in § 1, 2 bewiesenen Ungleichung (3) des § 1.

Es ist sehr leicht zu zeigen, daß

(4) $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^{\mu}} > n^{1-\delta}$$

bei beliebigem positiven δ niemals beschränkt sein kann. Falls $\delta \geqq \frac{1}{\mu}$ ist, so bedarf das offenbar keines Beweises; falls $0 < \delta < \frac{1}{\mu}$ ist, so bestimme ich eine (offenbar positive) Zahl ε, so daß $\frac{1}{\mu+2\varepsilon} = \frac{1}{\mu} - \delta$ ist; da das arithmetische Mittel von n positiven Zahlen nicht kleiner als das geometrische Mittel derselben Zahlen ist, so hat man

(5) $$\frac{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^{\mu+2\varepsilon}}}{n} \geqq \sqrt[n]{\prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^{\mu+2\varepsilon}}};$$

ferner ist

1) μ ist also, in der Bezeichnung von Vivanti-Gutzmer, der sogenannte μ-Index der Potenzreihe.

$$(6)\qquad \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|} = |c_n|, \quad \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^{\mu+2\varepsilon}}} = |c_n|^{\frac{1}{\mu+2\varepsilon}}.$$

Zufolge (2) ist für unendlich viele n

$$(7)\qquad |c_n| > \frac{1}{(n!)^{\mu+\varepsilon}}, \quad |c_n|^{\frac{1}{\mu+2\varepsilon}} > \frac{1}{(n!)^{\frac{\mu+\varepsilon}{\mu+2\varepsilon}}} = \frac{1}{(n!)^{1-\varepsilon'}},$$

wo ε' positiv ist, da $\frac{\mu+\varepsilon}{\mu+2\varepsilon} < 1$ ist. Es folgt aus (5), (6), (7), daß für dieselben unendlich vielen n

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^{\mu+2\varepsilon}}} > \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \left(\sqrt[n]{n!}\right)^{\varepsilon'}$$

ist. Da $\sqrt[n]{n!}$ bekanntlich mit wachsendem n nach e strebt, $\left(\sqrt[n]{n!}\right)^{\varepsilon'}$ aber über alle Grenzen wächst, so wächst die rechte Seite der letzteren Ungleichung mit wachsendem n über alle Grenzen, und es kann also (4) nicht beschränkt sein.

Anhang.

Das Ziel des folgenden ist, die in der Einleitung zitierten Laguerreschen Sätze unter Zugrundelegung des von Laguerre angegebenen Wortlautes (Satz III der Einleitung) zu beweisen.

Zunächst wird, wie in der Einleitung erwähnt wurde, zu Satz I der Einleitung (welcher im Kap. I bewiesen wurde) die folgende Ergänzung hinzubewiesen werden:

(Satz I.) *Es sei eine Folge von Polynomen $f_n(x)$ vorgelegt (n durchlaufe die positiven ganzen Zahlen). Es sei für jedes Polynom der Folge $f_n(0) = 1$ und $f_n(x)$ genau vom q_n^{ten} Grade*[1]) *($q_n \geqq 1$); also*

$$f_n(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{q_n} a_\nu^{(n)} x^\nu; \qquad a_{q_n}^{(n)} \neq 0.$$

Ich setze voraus, daß die Folge $f_n(x)$ in einer Umgebung des Punktes $x = 0$ gleichmäßig konvergent sei. Die Nullstellen von $f_n(x)$ bezeichne ich mit

$$\alpha_1^{(n)}, \ \alpha_2^{(n)}, \ \ldots \ \alpha_{q_n}^{(n)}$$

und mache bezüglich derselben die Voraussetzung: es gebe zwei positive von n unabhängige Zahlen k und C, so daß für alle n ist:

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{q_n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k} < C.$$

Ich behaupte nun, daß die Folge $f_n(x)$ in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereich der komplexen x-Ebene gleichmäßig konvergent ist.

Dieser Satz ist zuerst von mir erkannt und mit Hilfe der weiter ausgebildeten Methoden des Kap. 1, sowie unter Hinzuziehung des Diagonalverfahrens bewiesen worden. Dieses Resultat teilte ich Herrn G. Pólya mit und wies darauf hin, daß es wünschenswert sei, obigen Satz auf einen bekannten Satz von Stieltjes

1) Während im Satze I der Einleitung vorausgesetzt wurde, daß das n^{te} Polynom der Folge $f_n(x)$ vom n^{ten} Grade sei, wird hier allgemeiner vorausgesetzt, daß $f_n(x)$ von beliebigem Grade $q_n \geqq 1$ ist.

zurückzuführen, was im Falle $k \leqq 1$ leicht durchführbar ist, im Falle $k > 1$ mir jedoch nicht gelungen war. Hierfür fand Herr Pólya einen sehr einfachen Beweis; da dieser letztere Beweis für Satz I dieses Anhanges bedeutend kürzer ist, als der zuerst von mir gefundene, so will ich hier diesen Beweis von Herrn Pólya wiedergeben.

Herr Pólya benutzt die bekannte, für alle z gültige Abschätzung des Weierstraßschen Primfaktors (vgl. Vivanti-Gutzmer, *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Leipzig 1906, S. 233—236):

$$(2) \qquad \left|(1-z)\,e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^h}{h}}\right| \leqq e^{c|z|^{h'}},$$

welche offenbar auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$|1-z| \leqq e^{-\Re\left(\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^h}{h}\right)+c|z|^{h'}};$$

es bedeuten hier: h eine ganze Zahl $\geqq 0$ (falls $h = 0$ ist, so ist die linke Seite der Ungleichung (2) gleich $1-z$ zu setzen), $h+1 \geqq h' > h$, und c eine positive von z unabhängige Konstante. Diese Abschätzung wird auf die Linearfaktoren der Polynome $f_n(x)$ angewendet, wobei gesetzt werden muß: $h' = k$; $h = [k]$, wenn k nicht ganz; $h = k-1$, wenn k ganz ist. Es ergibt sich dann

$$(3) \qquad \left|f_n(x)\right| = \left|\prod_{\nu=1}^{q_n}\left(1-\frac{x}{\alpha_\nu^{(n)}}\right)\right| \leqq \prod_{\nu=1}^{q_n} e^{-\Re\left(\frac{x}{\alpha_\nu^{(n)}}+\frac{x^2}{2(\alpha_\nu^{(n)})^2}+\cdots+\frac{x^h}{h(\alpha_\nu^{(n)})^h}\right)+c\left|\frac{x}{\alpha_\nu^{(n)}}\right|^k}$$

$$= e^{-\Re\left(\frac{x\cdot s_1^{(n)}}{1}+\frac{x^2\cdot s_2^{(n)}}{2}+\cdots+\frac{x^h\cdot s_h^{(n)}}{h}\right)+c\cdot|x|^k\cdot\sum_{\nu=1}^{q_n}\frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^k}},$$

wo also

$$\sum_{\nu=1}^{q_n}\frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}} = s_1^{(n)}, \quad \sum_{\nu=1}^{q_n}\frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)})^2} = s_2^{(n)}, \cdots \sum_{\nu=1}^{q_n}\frac{1}{(\alpha_\nu^{(n)})^h} = s_h^{(n)}$$

gesetzt worden ist. Jede der Zahlen $s_\rho^{(n)}$ $(1 \leqq \rho \leqq h)$ ist im Falle $q_n \geqq p$ eine ganze rationale Funktion der p Zahlen $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots a_p^{(n)}$:

$$(4) \qquad s_p^{(n)} = G(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots a_p^{(n)});$$

die Koeffizienten der Funktion G sind von n unabhängig; (4) gilt auch, falls $q_n < p$ ist: es müssen dann $a_{q_n+1}^{(n)}, a_{q_n+2}^{(n)}, \ldots a_p^{(n)}$ in (4) gleich Null gesetzt werden. Da die Polynomfolge $f_n(x)$ in einer Umgebung des Nullpunktes gleichmäßig konvergent ist, so sind $\lim_{n=\infty} a_1^{(n)}$, $\lim_{n=\infty} a_2^{(n)}$, $\ldots$ $\lim_{n=\infty} a_p^{(n)}$ (im Falle $q_n < p$ hat man

$a_{q_n}^{(n)}+1$, $a_{q_n}^{(n)}+2, \ldots a_p^{(n)}$ wieder gleich Null zu setzen) vorhanden; also ist zufolge (4) auch $\lim_{n=\infty} s_p^{(n)}$ vorhanden; folglich gibt es zu jedem p eine von n unabhängige Konstante S_p, so daß für alle n

$$s_p^{(n)} < S_p \tag{5}$$

ist. Es ergibt sich also auf Grund von (3), (1) und (5):

$$|f_n(x)| \leqq e^{\frac{|x|\,.\,S_1}{1}+\frac{|x|^2.S_2}{2}+\cdots+\frac{|x|^h.S_h}{h}+e\,.\,C\,.\,|x|^k} \tag{6}$$

Die Folge $f_n(x)$ ist also gleichmäßig beschränkt in jedem endlichen Bereich und konvergiert gleichmäßig in einem Kreise um den Punkt $x = 0$. Daraus folgt auf Grund eines Satzes von Stieltjes (vgl. *Recherches sur les fractions continues* [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Bd. 8, J. 1894, 122 S.] S. 50), daß dieselbe in der ganzen Ebene konvergiert, gleichmäßig in jedem endlichen Bereich.

Da ferner die Ungleichung (6) für jedes Polynom der Folge gilt, so gilt dieselbe auch für die Grenzfunktion; daraus ergibt sich unmittelbar auf Grund der Hadamardschen Theorie der ganzen Funktionen endlichen Geschlechts, daß $F(x)$ (die Grenzfunktion) endliches Geschlecht hat, welches $\leqq |k|$ ist; es ergibt sich also auf Grund der Hadamardschen Theorie ein Beweis für den Satz I der Einleitung. (Die dort angegebene Ergänzung im Falle, daß k ganz ist, ergibt sich, wie im Kap. I, unter Hinzuziehung des dort zitierten Satzes von Hurwitz.)

Es ist jetzt leicht, auf Grund des soeben bewiesenen Satzes I dieses Anhanges den folgenden Satz zu beweisen:

(Satz II.) *Es sei eine Folge von Polynomen $\varphi_n(x)$ vorgelegt, deren Gradzahlen sämtlich $\geqq 1$ sind. Es sei in der komplexen x-Ebene eine Gerade g gezogen; dieselbe teilt die Ebene in zwei Halbebenen H_1 und H_2. Es möge die Halbebene H_1 frei sein von Wurzeln der Polynome $\varphi_n(x)$; alle Wurzeln derselben liegen also in der Halbebene H_2 und auf der Geraden g. (Es können natürlich auch alle Wurzeln auf der Geraden g liegen.) Ferner möge in der Halbebene H_1 ein Gebiet — etwa ein Kreis K — liegen, innerhalb welches die Polynomfolge gleichmäßig gegen eine nicht identisch verschwindende Grenzfunktion konvergiert.*

Dann konvergiert die Polynomfolge notwendig in der ganzen Ebene, gleichmäßig in jedem endlichen Bereich. —

Ich bestimme zunächst im Innern von K einen Punkt x_0, wo die

Grenzfunktion von Null verschieden ist; das ist möglich, da die Grenzfunktion nach Voraussetzung innerhalb K nicht identisch verschwindet. Den Abstand des Punktes x_0 von der Geraden g bezeichne ich mit $d > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf ich voraussetzen, daß $x_0 = 0$ ist, da der allgemeine Fall auf diesen durch eine Translation zurückzuführen ist. Ferner darf ich ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß die Gerade g die positive reelle Achse rechtwinklig schneidet (also im Punkt $d > 0$), denn der allgemeine Fall ist auf diesen durch eine Drehung zurückzuführen. Den Grad von $\varphi_n(x)$ bezeichne ich mit $q_n \geqq 1$, die Nullstellen von $\varphi_n(x)$ mit

$$\alpha_1^{(n)},\ \alpha_2^{(n)},\ \ldots\ \alpha_{q_n}^{(n)};$$

dieselben haben offenbar alle die Form

$$\alpha_\nu^{(n)} = \xi_\nu^{(n)} + i\,\eta_\nu^{(n)},$$

wo $\xi_\nu^{(n)}$ und $\eta_\nu^{(n)}$ reell sind, und $\xi_\nu^{(n)} \geqq d > 0$ ist. Da $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(0) \neq 0$ ist, so ist für alle hinreichend großen $n \geqq n_1$ auch $\varphi_n(0) \neq 0$, und ich bilde die Folge

$$f_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(0)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{q_n} a_\nu^{(n)} x^\nu \qquad (n \geqq n_1),$$

die in einer Umgebung des Punktes $x = 0$ gleichmäßig konvergent ist; also ist $\lim\limits_{n=\infty} a_1^{(n)}$ vorhanden, und es gibt eine positive Konstante C, so daß für alle $n \geqq n_1$ die Ungleichung $a_1^{(n)} < C$ gilt. Ferner ist

$$-a_1^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{q_n} \frac{1}{\alpha_\nu^{(n)}} = \sum_{\nu=1}^{q_n} \frac{\xi_\nu^{(n)} - i\,\eta_\nu^{(n)}}{\alpha_\nu^{(n)\,2}};$$

$$|a_1^{(n)}| \geqq \sum_{\nu=1}^{q_n} \frac{\xi_\nu^{(n)}}{|\alpha_\nu^{(n)}|^2} \geqq d \sum_{\nu=1}^{q_n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^2};$$

$$\sum_{\nu=1}^{q_n} \frac{1}{|\alpha_\nu^{(n)}|^2} \leqq \frac{|a_1^{(n)}|}{d} < \frac{C}{d}$$

für alle $n \geqq n_1$. Also konvergiert auf Grund des Satzes I dieses Anhanges die Polynomfolge $f_n(x)$ und somit auch die Polynomfolge $\varphi_n(x)$ in der ganzen komplexen x-Ebene, gleichmäßig in jedem endlichen Bereich. Auf Grund von Kap. I (Satz I der Einleitung) ergibt sich ferner, daß die Grenzfunktion gleich dem Produkt einer Funktion vom Geschlecht Eins ist mal einer Funktion

von der Form $e^{\gamma x^2}$, wo γ eine Konstante bedeutet. Hieraus ergibt sich offenbar auch die Gültigkeit der in Kap. II ohne Beweis ausgesprochenen Verallgemeinerung des 2ten Laguerreschen Satzes (Satz 2 des Kap. II).

Als unmittelbares Corollar zu letzterem Satze II ergibt sich offenbar der folgende Satz:

(Satz III.) *Falls eine Folge von Polynomen mit nur reellen Nullstellen in irgend einem Gebiet der komplexen Ebene — etwa im Innern des Kreises K — gleichmäßig gegen eine nicht identisch verschwindende Grenzfunktion konvergiert, dann konvergiert dieselbe in der ganzen Ebene, gleichmäßig in jedem endlichen Bereich.*

In der Tat: die reelle Achse ist hier die Gerade g des Satzes II. Falls dieselbe den Kreis K nicht trifft, so liegt K entweder in der Halbebene $\Im(x) > 0$ oder $\Im(x) < 0$. Diejenige dieser Halbebenen, welche K enthält, ist die Halbebene H_1 des Satzes II, die andere ist die Halbebene H_2. Falls die reelle Achse K trifft, so kann ich im Innern von K einen kleineren Kreis bestimmen, welcher etwa ganz in der Halbebene $\Im(x) > 0$ liegt; letztere kann dann als Halbebene H_1 des Satzes II angesehen werden, die Halbebene $\Im(x) < 0$ dagegen als H_2.

Ein wesentlicher Teil des Satzes III ist vor mir von Herrn Pólya in den in der Einleitung zitierten Arbeiten bewiesen worden; in einer dieser Arbeiten ist von Herrn Pólya die Frage gestellt worden, ob der Satz III besteht oder nicht.

Auf Grund von Satz III dieses Anhanges und Kap. II ergibt sich offenbar die Gültigkeit des Satzes IV der Einleitung. —

Es soll endlich noch der folgende Satz bewiesen werden:

(Satz IV.) *Falls eine Folge von Polynomen mit nur reellen Nullstellen für jeden komplexen x-Wert gegen eine nicht identisch verschwindende ganze Funktion konvergiert, dann konvergiert dieselbe gleichmäßig in jedem endlichen Bereich der komplexen x-Ebene.*

Es muß zu diesem Zweck ein bekannter Satz von Osgood benutzt werden, welcher folgendes aussagt: falls eine Folge von analytischen Funktionen in jedem Punkt eines Gebietes konvergent ist, so läßt sich innerhalb desselben ein Teilgebiet angeben, wo die Folge gleichmäßig konvergent ist (vgl. z. B. P. Montel, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, Paris 1910, S. 108). Auf Grund desselben gibt es in der komplexen Zahlenebene einen Kreis, wo die Polynomfolge des Satzes IV gleichmäßig konvergent ist; da ferner die Grenzfunktion nach Voraussetzung eine ganze nicht identisch verschwindende Funktion ist, so ver-

schwindet die Grenzfunktion auch im Innern des letzteren Kreises nicht identisch, und es folgt also auf Grund von Satz III dieses Anhanges, daß die Folge in jedem ganz im Endlichen gelegenen Bereiche der komplexen Ebene gleichmäßig konvergent ist. (Offenbar ist beim Beweise von Satz IV nur ein geringer Teil der Voraussetzungen desselben aufgebraucht worden; Satz IV hätte also auch unter Benutzung geringerer Voraussetzungen formuliert werden können.)

Jetzt ist es möglich geworden, die Laguerreschen Sätze in der von Laguerre angegebenen Fassung (Satz III der Einleitung) zu beweisen: Falls die Grenzfunktion (die nach Voraussetzung eine ganze Funktion ist) identisch verschwindet, so habe ich nichts zu beweisen; falls dieselbe nicht identisch verschwindet, so konvergieren die Polynomfolgen auf Grund von Satz IV dieses Anhanges gleichmäßig in jedem endlichen Bereich — unter dieser Voraussetzung sind die Laguerreschen Sätze aber schon in Kap. II bewiesen worden.

Unter Benutzung von Satz I dieses Anhanges ist es gleichfalls möglich, die Voraussetzungen des Satzes 3 in Kap. II wesentlich zu reduzieren, ohne daß an der Behauptung desselben etwas geändert zu werden braucht; es genügt nämlich für die Polynomfolge des letzteren Satzes gleichmäßige Konvergenz in einer Umgebung des Nullpunktes vorauszusetzen, denn daraus folgt schon die gleichmäßige Konvergenz der Polynome in jedem endlichen Bereiche der komplexen Ebene.

Der wesentliche Teil des Inhaltes dieses Anhanges (verbunden mit einigen weiteren Anwendungen des Satzes I desselben) erscheint gleichfalls in einer gemeinsamen Arbeit von Herrn Pólya und mir (*Über einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Bd. 37, 1914]).

Lebenslauf.

Ich, Egon Lindwart, Sohn des in Riga angestellten Stadtingenieurs Eduard Lindwart, bin am 28. Januar (16. Januar) 1889 geboren; ich bin russischer Staatsangehöriger, deutscher Nationalität, evangelisch-reformierter Konfession. Von 1898—1906 besuchte ich das Stadtgymnasium zu Riga, woselbst ich 1906 die Maturitätsprüfung bestand. Von 1906—1910 studierte ich an der Universität Jurjew (Dorpat) Mathematik und Physik; 1911 wurde mir von der Jurjewer Universität der Grad eines Kandidaten der physiko-mathematischen Wissenschaften zuerkannt; im selben Jahre bestand ich in Jurjew die Oberlehrerprüfung in Mathematik und Physik. Vom Sommersemester 1911 an bin ich in Göttingen immatrikuliert und habe daselbst Vorlesungen und Seminare bei den Herren Carathéodory, Courant, Haar, Hilbert, v. Kármán, Landau, Schimmack †, Toeplitz und Weyl besucht. Allen diesen Herren spreche ich meinen aufrichtigen Dank aus. Ich fühle mich verpflichtet, hier zum Ausdruck zu bringen, daß ich besonderen Dank Herrn Professor Landau schulde, und zwar für meine Ausbildung in seinen Vorlesungen und das mir während der ganzen Zeit meines hiesigen Aufenthalts erwiesene Wohlwollen.

Endlich ist es mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle Herrn Dr. phil. Georg Pólya aus Budapest meinen Dank auszusprechen für verschiedene Anregungen, die ich während Anfertigung dieser Arbeit von ihm erhalten habe.